

سری سوم تمرین‌های آمار و احتمالات مهندسی

تحویل: شنبه ۹۵/۱۲/۷

۱- دو تاس سالم را پرتاب کرده‌ایم. با شرط آنکه تاس‌ها اعداد متفاوتی را نشان داده‌اند:

الف) احتمال آنکه حداقل یکی از آنها شش آمده باشد، چقدر است؟

ب) اگر مجموع اعداد دو تاس برابر ۱۰ باشد، احتمال آن که حداقل یکی از آنها شش آمده باشد، چقدر است (شرط متفاوت بودن اعداد دو تاس همچنان برقرار است)؟

۲- در n آزمایش مستقل احتمال موفقیت p و احتمال شکست $1 - p$ می‌باشد. هرگاه p_n احتمال وقوع تعداد موفقیت زوج در n پرتاب باشد (تعداد موفقیت صفر نیز زوج فرض می‌شود)،

الف) نشان دهید که: $p_n = p(1 - p_{n-1}) + (1 - p)p_{n-1}$ (مقادیر p_0 و p_1 چقدر باید در نظر گرفته شوند؟ چرا؟)

ب) نشان دهید که $p_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$ در رابطه‌ی الف صدق می‌کند.

پ) با استفاده از موارد مطرح شده در این سوال علت برابری زیر را توضیح دهید:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}$$

در رابطه‌ی فوق $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی n می‌باشد.

۳- دو پیشامد E_1 و E_2 با شرط F به طور مشروط از هم مستقل هستند هرگاه: $p(E_1|E_2F) = p(E_1|F)$

الف) نشان دهید رابطه‌ی فوق معادل است با: $p(E_1E_2|F) = p(E_1|F)p(E_2|F)$

ب) درستی مطلب زیر را ثابت کرده و یا با ارائه‌ی یک مثال نقض نادرستی آن را نشان دهید:

اگر E_1 و E_2 دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه آن دو به شرط هر پیشامد دلخواه F نیز به طور مشروط مستقل خواهند بود.

۴- A و B به ترتیب دارای n و $n + 1$ سکه‌ی سالم هستند. آنها سکه‌های خود را پرتاب می‌کنند. برنده کسی است که دارای تعداد شیر بیشتری باشد. احتمال برنده شدن B چقدر است؟

۵- در یک مسابقه‌ی پرتاب سکه‌ی سالم بین A و B، نفر A بازی را شروع می‌کند. او سکه را پرتاب می‌کند تا دو شیر متوالی آمده و او برنده شود و یا پیش از دو شیر متوالی خط بیاید و سپس سکه را به B بدهد. نفر B نیز سکه را پرتاب می‌کند تا دو شیر متوالی آمده و برنده شده و یا پیش از دو شیر متوالی خط بیاید و سکه را به A برگرداند و به همین ترتیب بازی تا مشخص شدن برنده ادامه پیدا می‌کند. احتمال برنده شدن A را حساب کنید.

۶- در یک بازی، بازیکنی دو تاس را پرتاب می‌کند. اگر مجموع اعداد ظاهر شده ۲، ۳ یا ۱۲ باشد بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد، برنده است. اگر نتیجه غیر از این باشد بازی ادامه پیدا میکند تا این که مجموع ظاهر شده برابر با مجموعی باشد که در بار اول پرتاب ظاهر شده بود (و طبیعتاً متفاوت با ۲، ۳، ۷، ۱۱ یا ۱۲ بوده) که در این صورت او برنده است و یا این که مجموع ۷ ظاهر شود که در این صورت او بازنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را تعیین کنید.